

6 SEM FYUGP MTHC6A

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC6A

(Metric Spaces and Complex Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) এটা বিন্দুৰ পাৰ্শ্ববৰ্তী অঞ্চলৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define neighbourhood of a point.

- (b) ধৰা (X, d) এটা মেট্রিক স্থান (স্পেচ) আৰু ধৰা

$$d_1(x, y) = 5d(x, y), \quad x, y \in X$$

তেন্তে দেখুওৱা যে d_1 , X ৰ ওপৰত এটা মেট্রিক। 3

Let (X, d) be a metric space and let

$$d_1(x, y) = 5d(x, y) \quad \text{for } x, y \in X$$

Then show that d_1 is a metric on X .

(2)

অথবা / Or

ক'টি অনুক্রমের সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্রিক স্থানত প্রত্যেকটো অভিসারী অনুক্রম ক'টি অনুক্রম।

Define Cauchy sequence. Prove that in a metric space every convergent sequence is a Cauchy sequence.

- (c) ধৰা (X, d) এটা মেট্রিক স্থান আৰু $A, B \subset X$. তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$. 2

Let (X, d) be a metric space and $A, B \subset X$. Then show that $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

- (d) প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্রিক স্থানত প্রতিটো অভিসারী অনুক্রমৰ এটা অধিতীয় সীমা থাকে। 4

Prove that in a metric space every convergent sequence has a unique limit.

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্রিক স্থানত আৰদ্ধ সংহতিৰ যি কোনো ছেদন আৰদ্ধ সংহতি।

Prove that in a metric space any arbitrary intersection of closed sets is closed.

- (e) প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্রিক স্থানত প্রতিটো মুক্ত বল এটা মুক্ত সংহতি। 5

Prove that in a metric space each open sphere is an open set.

26P/990

(Continued)

(3)

অথবা / Or

ধৰা (X, d) এটা পূৰ্ণ মেট্রিক স্থান আৰু (Y, d_Y) , (X, d) ৰ উপস্থান। তেন্তে দেখুওৱা যে, যদি Y আৰদ্ধ হয়, তেন্তিয়া Y পূৰ্ণস্থান হয়।

Let (X, d) be a complete metric space and (Y, d_Y) be a subspace of (X, d) . Then show that Y is closed $\Rightarrow Y$ is complete.

2. (a) অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Write the definition of continuous function.

- (b) ধৰা X এটা মেট্রিক স্থান আৰু $A, B \subset X$ অসংলগ্ন। যদি A, B দুয়োটা সংহতি আৰদ্ধ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে A আৰু B বিচ্ছিন্ন হয়। 2

Let X be a metric space and $A, B \subset X$ be disjoint. If A, B both are closed, then show that A and B are separated.

- (c) ধৰা (X, d_1) আৰু (Y, d_2) দুটা মেট্রিক স্থান আৰু $f : X \rightarrow Y$ এটা বাইজেক্টিভ ফলন। তেন্তে দেখুওৱা যে তলৰ উক্তি দুটা সমতুল্য : 4

(i) f এটা হোমিঅ'মৰ্ফিজম।

(ii) সংহতি $G \subset X$ মুক্ত হ'ব যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ ইমেজ $f(G) \subset Y$ মুক্ত হয়।

26P/990

(Turn Over)

(4)

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ be a bijective function. Then show that the following two statements are equivalent :

- (i) f is a homeomorphism.
- (ii) The set $G \subset X$ is open if and only if its image $f(G) \subset Y$ is open.

অথবা / Or

ধৰা (X, d) এটা মেট্রিক স্থান আৰু $A, B \subset X$ কমপ্যাক্ট। তেন্তে দেখুওৱা যে $A \cup B$ কমপ্যাক্ট হয়।

Let (X, d) be a metric space and let $A, B \subset X$ be compact. Then show that $A \cup B$ is compact.

- (d) ধৰা X আৰু Y মেট্রিক স্থান আৰু $f: X \rightarrow Y$ এটা ফলন। দেখুওৱা যে f , $x_0 \in X$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হ'ব যদি আৰু যদিহে প্রতিটো অনুক্রম $\{x_n\} \subset X$ বাবে $x_n \rightarrow x_0$ হ'লে $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ হয়।

5

Let X and Y be metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ be a function. Show that f is continuous at a point $x_0 \in X$, iff $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, for every sequence $\{x_n\} \subset X$ with $x_n \rightarrow x_0$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে এটা সাধাৰণ মেট্রিক স্থান $\mathbb{R}_u$ ত এটা উপসংহতি $A \subset \mathbb{R}$ সংযুক্ত হয় যদি আৰু যদিহে A এটা অন্তৰাল হয়।

Show that a subset $A \subset \mathbb{R}$ in the usual metric space $\mathbb{R}_u$ is connected if and only if it is an interval.

26P/990

(Continued)

(5)

3. (a) $|z|$ ৰ মান লিখা, য'ত $z = e^{i\theta}$.

1

Write the value of $|z|$, when $z = e^{i\theta}$.

- (b) $f(z) = z + \frac{1}{z}$, ($z \neq 0$) ফলনটো $f(z) =$

$u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ আকাৰত প্রকাশ কৰা।

2

Express the function $f(z) = z + \frac{1}{z}$, ($z \neq 0$) in the form $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

- (c) যদি $f(z) = \frac{iz}{2}$ অ'পেন ডিস্ক $|z| < 1$ ত থাকে, তেন্তে

দেখুওৱা যে

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$$

(সীমাব সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰা)

2

If $f(z) = \frac{iz}{2}$ in the open disk $|z| < 1$, then show that

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$$

(Use definition of limit)

অথবা / Or

অৱকলজৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি $\frac{dw}{dz}$ উলিওৱা য'ত

$$w = z^2.$$

Find $\frac{dw}{dz}$ when $w = z^2$ (use definition of derivative).

26P/990

(Turn Over)

(6)

(d) $f(z) = z^2$ ফলনৰ বাবে ক'চি-ৰীমান, সমীকৰণবোৰ সত্যাপন কৰা।
Verify Cauchy-Riemann equations for the function $f(z) = z^2$.

2

(e) $\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ সংহতিৰ বাবে অঞ্চলটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াক অংকন কৰা।
Determine the region of the set $\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ and sketch it.

4

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $f'(z)$ ৰ সৰ্বত্র অস্তিত্ব থাকে য'ত $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$ আৰু $f'(z)$ নিৰ্ণয় কৰা।

Show that $f'(z)$ exists everywhere when $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$ and find $f'(z)$.

4. (a) $\sin z$ ক ঘাতীয় ৰূপত লিখা।
Write $\sin z$ in exponential form.

1

(b) দেখুওৱা যে $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ ফলনটো বিশ্লেষণাত্মক।
Show that the function

2

$f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ is analytic.

26P/990

(Continued)

(7)

(c) $z = x + iy$ সংখ্যাটো নিৰ্ণয় কৰা, য'ত $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.
Find the number $z = x + iy$, where $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

3

অথবা / Or

$\log(-ei)$ ৰ মুখ্য মান উলিওৱা।
Find the principal value of $\log(-ei)$.

(d) ক'চিৰ অনুকলনীয় সূত্র লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।
State and prove Cauchy integral formula.

5

অথবা / Or

$\int_C \frac{z+2}{z} dz$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত C হ'ল অৰ্ধ-বৃত্ত $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Evaluate

$$\int_C \frac{z+2}{z} dz$$

where C is the semi-circle $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).

5. (a) এলজেব্ৰাৰ মৌলিক উপপাদ্যটো লিখা।
Write the fundamental theorem of algebra.

2

26P/990

(Turn Over)

(b) $\sin z$ ফলনটো টেইলৰ শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

4

Expand the function $\sin z$ in Taylor's series.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$, য'ত

$$z_n = -1 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$, where

$$z_n = -1 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(c) লাউভিলৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

5

State and prove Liouville's theorem.

অথবা / Or

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} \quad \text{ফলনটো} \quad 1 < z < 3$$

আদিক্ষেত্ৰত লৰেণ্টৰ শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

Expand $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ in a Laurent's series in the domain $1 < z < 3$.
