

6 SEM FYUGP MTHC6D1/D2

2 0 2 6

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC6D1/D2

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Paper : MTHC6D1

(Discrete Mathematics)

1. (a) ক্রমিত সংহতিৰ নিম্ন আৰু উচ্চ মৌলৰ সংজ্ঞা লিখা।

1+1=2

Define bottom to top elements of ordered set.

- (b) যদি P এটা ক্রমিত সংহতি হয় আৰু $S \subseteq P$ এনেকুৱা যাতে P ত $\vee S$ আৰু $\wedge S$ থাকে, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

If P is an ordered set and $S \subseteq P$ such that $\vee S$ and $\wedge S$ exist in P , then show that

- (i) $s \leq \vee S$ আৰু (and) $s \geq \wedge S$, $\forall s \in S$

(2)

(ii) সকলো $s \in S$ আৰু যি কোনো $x \in P$ বাবে,
 $x \leq \wedge S$ যদি আৰু একমাত্র যদি $x \leq s$ হয়;
 for any $x \in P$, $x \leq \wedge S$ if and only if
 $x \leq s$ for all $s \in S$;

(iii) সকলো $s \in S$ আৰু যি কোনো $x \in P$ বাবে,
 $x \geq \vee S$ যদি আৰু একমাত্র যদি $x \geq s$ হয়।
 $2+2+2=6$
 for any $x \in P$, $x \geq \vee S$ if and only if
 $x \geq s$ for all $s \in S$.

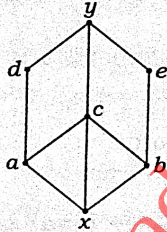
2. (a) লেটিচ আইচ'মৰফিজমৰ সংজ্ঞা লিখা।
 Define lattice isomorphism.

1

(b) তলত L লেটিচক অংকন কৰা হ'ল। তেওঁ
 $A = \{a, c, d, y\}$ উপসংহতিটো L ৰ চাব-লেটিচ
 হয়নে?

2

The lattice L is drawn below. Is the
 subset $A = \{a, c, d, y\}$ is a sub-lattice
 of L ?



26P/1235

(Continued)

(3)

(c) যদি P এটা অশূন্য ক্রমিত সংহতি হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে
 তলৰ বাক্যকেইটাৰ সমতুল্য :

5

If P is a non-empty ordered set, then
 show that the following are equivalent :

(i) P এটা সম্পূৰ্ণ লেটিচ।

P is a complete lattice.

(ii) P ৰ প্ৰতিটো উপসংহতি S ৰ বাবে P ত $\wedge S$ আছে।

$\wedge S$ exists in P for every subset S of P .

(iii) P ত এটা উচ্চ মৌল T আছে আৰু P ৰ প্ৰতিটো অশূন্য
 উপসংহতি S ৰ P ত $\wedge S$ আছে।

P has a top element T , and $\wedge S$ exists
 in P for every non-empty subset S
 of P .

নাইবা / Or

যদি L আৰু K দুটা লেটিচ হয় আৰু $f : L \rightarrow K$ এটা
 ফলন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে f এটা লেটিচ
 আইচ'মৰফিজম হয় যদি আৰু একমাত্র যদি ই এটা
 ক্রম-ৰক্ষক হয়।

If L and K are lattices and $f : L \rightarrow K$ is a
 map, then show that f is a lattice
 isomorphism if and only if it is an
 order-preserving.

3. (a) প্ৰতিকপক লেটিচৰ এটা উদাহৰণসহ সংজ্ঞা দিয়া।

2

Define modular lattice with an example.

26P/1235

(Turn Over)

(4)

(b) দেখুওরা যে প্রতিটো বিভাজক লেটিচ একোটা প্রতিকাপক লেটিচ।

Show that every distributive lattice is a modular lattice.

2

(c) প্রমাণ কৰা যে প্রতিটো শৃঙ্খল $(L, \leq)$ একোটা বিভাজক লেটিচ।

Prove that every chain $(L, \leq)$ is a distributive lattice.

4

নাইবা / Or

যদি L এটা বুলিয়ান লেটিচ হয়, তেন্তে দেখুওরা যে—

If L is a Boolean lattice, then show that—

(i) $0' = 1; 1' = 0$

(ii) $a'' = a, \forall a \in L$

4. (a) তলৰ যি কোনো দুটা বুলিয়ান ফলনক কাৰ্ণ' মেপত প্রকাশ কৰা :

$2 \times 2 = 4$

Represent any two of the following Boolean functions by Karnaugh map :

(i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b')$

(ii) $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c')$

(iii) $(a \wedge b' \wedge c \wedge d') \vee (a \wedge b \wedge c \wedge d') \vee (a \wedge b' \wedge c' \wedge d')$

(b) কুৰাইন-মেক্সকাঙ্কি কলন বিধি ব্যৱহাৰ কৰি বুলিয়ান ফলন $\Sigma(7, 9, 10, 11, 14, 15)$ ক a, b, c, d ত সৰলতম ৰূপ দিয়া।

4

26P/1235

(Continued)

(5)

Using Quine-McCluskey algorithm find minimal expression for the Boolean function $\Sigma(7, 9, 10, 11, 14, 15)$ in a, b, c, d .

5. (a) গ্ৰাফ কি?

1

What is graph?

(b) দেখুওৱা যে চিউড'গ্ৰাফৰ অযুগ্ম শীৰ্ষ বিন্দুৰ সংখ্যা যুগ্ম।

3

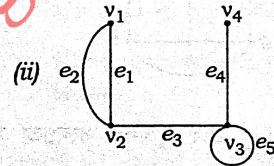
Show that the number of odd vertices in a pseudograph is even.

(c) তলত দিয়া গ্ৰাফবোৰৰ ডিগ্রী অনুক্রম কি কি?

$2+2=4$

What is the degree sequence of the following graphs?

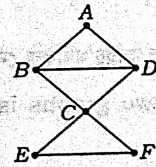
(i) $K_{2,3}$



6. (a) চিউড'গ্ৰাফত ইউলাৰীয় চক্ৰ কি? তলত দেখুওৱা $ABCEFCDA$ গ্ৰাফডাল ইউলাৰীয় গ্ৰাফ হয়নে?

$1+2=3$

What is an Eulerian circuit in a pseudograph? Is the graph $ABCEFCDA$ shown below an Eulerian graph?



26P/1235

(Turn Over)

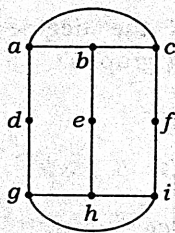
(6)

- (b) প্রমাণ কৰা যে যি কোনো অ-তুচ্ছ বৃক্ষৰ কমেও এটা শীৰ্ষবিন্দুৰ ডিগ্রী এক।

Prove that any non-trivial tree has at least one vertex of degree one.

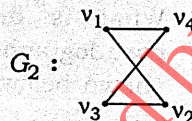
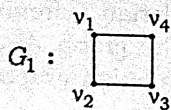
- (c) দেখুওরা যে তলৰ গ্ৰাফডালত হামিল্টনীয় চক্ৰ নাই, কিন্তু হামিল্টনীয় পদ আছে :

Show that the graph shown below has no Hamiltonian cycle, but has a Hamiltonian path :



7. (a) তলৰ G_1 আৰু G_2 গ্ৰাফ দুডালৰ সংলগ্নতা ম্যাট্ৰিক্স উলিওৱা :

Find adjacency matrices of the following graphs G_1 and G_2 :



দুয়োডাল গ্রাফ আইচ'মবফিক নে?

$$2+1=3$$

Are the two graphs isomorphic?

26P/1235

(Continued)

(7)

- (b) এডাল ভাষিত গ্রাফব সকলো শীর্ষবিন্দুব যোবাব আটাইতকৈ চুটি দ্ব্যত্ব উলিয়াবলৈ ব্যবহাব কবা ফ্লয়েড-ব্রবেশেল এলগ'রিদমটো লিখা।

Write Floyd-Warshall algorithm to find the shortest distance between all pairs of vertices in a weighted graph.

- (c) প্রমাণ করা যে—

Prove that

- (i) n শীৰ্ষবিন্দুৰ এটা পথৰ দূৰত্ব $(n-1)$;

a path with n vertices is of length $(n-1)$;

- (ii) এটা চক্ৰত প্ৰত্যেক শীৰ্ষবিন্দুৰ ডিগ্ৰী দুই। $2+2=4$

the degree of every vertex in a circuit is two.

26P/1235

(Turn Over)

(8)

Paper : MTHC6D2
(Probability and Statistics)

1. তলত দিয়াসমূহৰ সঠিক উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1 \times 2 = 2$

Choose the correct answer from the following :

(a) $\lambda = 4$ ৰ বাবে পয়ছন বিতৰণৰ গড় হৈছে

The mean of a Poisson distribution with parameter $\lambda = 4$ is

(i) 2

(ii) 4

(iii) 16

(iv) $\sqrt{2}$

(b) এটা সাধাৰণ বিতৰণ $N(\mu, \sigma^2)$ ৰ মানৰ বাবে বক্ৰৰ তলৰ ক্ষেত্ৰফল হ'ল

For a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$, the total area under the curve is

(i) 0.5

(ii) μ

(iii) 1

(iv) ∞

26P/1235

(Continued)

(9)

2. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা : $2 \times 4 = 8$

Answer the following questions :

(a) এটা অধিবৰ্ষত 53টা দেওবাৰ থকাৰ সম্ভাৱনা কিমান?

What is the probability that a leap-year selected at random will contain 53 Sundays?

(b) এটা যাদৃচ্ছিক চলক X -ৰ চৰ্তাধীন সম্ভাৱনা ঘনত্ব ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define conditional probability density function of a random variable X .

(c) পয়ছন বিতৰণৰ moment generating function নিৰ্ণয় কৰা।

Obtain the moment generating function of Poisson distribution.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে, যদি X আৰু Y দুটা অনবচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হয়, তেন্তে $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Prove that if X and Y are continuous random variables, then $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা : $4 \times 2 = 8$

Answer the following questions :

(a) সম্ভাৱনাৰ গুণাত্মক সূত্ৰটো উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

State and prove the multiplicative law of probability.

26P/1235

(Turn Over)

(10)

- (b) এটা পাত্ৰত 5টা বঙা আৰু 6টা ক'লা বল আছে।
প্ৰতিটো টানত 2টা বলকৈ দুবাৰ টনা হয়। যদি প্ৰথম
টানৰ পিছত বলবোৰ পুনৰ পাত্ৰলৈ উভতাই দিয়া নহয়,
তেতি প্ৰথম টানত 2টা বঙা বল আৰু দ্বিতীয় টানত 2টা
ক'লা বল পোৱাৰ সম্ভাৱনা নিৰ্ণয় কৰা।

An urn contains 5 red and 6 black balls.
Two drawings of 2 balls in each draw are
made. Find the probability of getting
2 red balls in the first draw and 2 black
balls in the second draw, if the balls are
not returned to the urn after the first
draw.

4. তলত দিয়াসমূহৰ সঠিক উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1 \times 2 = 2$

Choose the correct answer from the
following :

- (a) যদি X আৰু Y ৰ যৌথ PDF
 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, তেন্তে X আৰু Y হ'ব
If the joint PDF of X and Y is
 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, then X and Y are
(i) পৰৱৰ্ত্তন / dependent
(ii) স্বতন্ত্ৰ / independent
(iii) পৰস্পৰবাস্তব / mutually exclusive
(iv) সহসম্পৰ্কিত / correlated

26P/1235

(Continued)

(11)

- (b) সহসম্বন্ধ গুণাংক ρ ৰ মান তলৰ কোনটো পৰিসৰত
থাকে ?

The value of correlation coefficient ρ
always lies in the range

- (i) $[0, 1]$
(ii) $[-\infty, \infty]$
(iii) $[-1, 1]$
(iv) $[-1, 0]$

5. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা :

$2 \times 4 = 8$

Answer the following questions :

- (a) সীমাস্তিক বিতৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া। যৌথ বিতৰণৰ পৰা ইয়াক
কেনেকৈ পোৱা যায় ?

Define marginal distribution. How is it
obtained from a joint distribution?

- (b) যৌথ সমষ্টিত বিতৰণ ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define joint cumulative distribution
function.

- (c) দুটা যাদৃচ্ছিক চলক স্বতন্ত্ৰ হোৱা মানে কি ?

What does it mean for two random
variables to be independent?

- (d) $E(Y / X = x)$ ৰ স্বত্বাধীন প্ৰত্যাশা কি ?

What is conditional expectation
 $E(Y / X = x)$?

26P/1235

(Turn Over)

6. তলৰ প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা :

4×2=8

Answer the following questions :

(a) যাদৃচ্ছিক চলক X আৰু Y -ৰ যৌথ ঘনত্ব ফলন

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-x-y), & \text{for } x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

X আৰু Y -ৰ সীমাত্তিক বিতৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

The random variables X and Y have the joint density function

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-x-y), & \text{for } x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the marginal distributions of X and Y .

(b) যাদৃচ্ছিক চলক X আৰু Y -ৰ যৌথ ঘনত্ব ফলন

$$f(x, y) = (1/y)e^{-(y+x/y)}, \quad 0 < x, y < \infty$$

ভেদে—

The joint density functions of X and Y is

$$f(x, y) = (1/y)e^{-(y+x/y)}, \quad 0 < x, y < \infty$$

then—

(i) সত্যাপন কৰা যে প্ৰথমটো এটা যৌথ ঘনত্ব ফলন;

verify that the preceding is a joint density function;

(ii) $\text{cov}(x, y)$ নিৰ্ণয় কৰা।

find $\text{cov}(x, y)$.

26P/1235

(Continued)

7. তলত দিয়াসমূহৰ সঠিক উত্তৰটো বাচি উলিওৱা :

1×2=2

Choose the correct answer from the following :

(a) চেবাইচেভৰ অসমতা এটা যাদৃচ্ছিক চলক বিচ্যুত হোৱাৰ সম্ভাৱনাৰ ওপৰত এটা উৰ্দ্ধসীমা হৈছে

Chebyshev's inequality provides an upper bound for the probability that a random variable deviates from its

(i) mode

(ii) median

(iii) mean

(iv) range

(b) বৈখিক প্ৰত্যাহৰ্তনৰ মেট্ৰিক্স পদ্ধতিত $y = X\beta + \varepsilon$, ভেক্টৰ β এ প্ৰতিনিধিত্ব কৰে

In the matrix approach to linear regression $y = X\beta + \varepsilon$, the vector β represents

(i) অৱশিষ্টসমূহ

residuals

(ii) পৰৱৰ্তী চলক

dependent variables

(iii) প্ৰত্যাহৰ্তন গুণাংকসমূহ

regression coefficients

(iv) ত্ৰুটি বিচৰণ

error variance

26P/1235

(Turn Over)

8. (a) চেবাইচেভৰ অসমতা উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

5

State and prove Chebyshev's inequality.

নাইবা / Or

যাদৃচ্ছিক চলক X আৰু Y -ৰ যৌথ মোমেণ্ট জেনেৰেটিং ফাংচন দিয়া আছে

$$M_{x,y}(t_1, t_2) = \exp(3t_1 + 2t_2 + 5t_1t_2)$$

নিৰ্ণয় কৰা :

The joint moment generating function of random variables X and Y is given by $M_{x,y}(t_1, t_2) = \exp(3t_1 + 2t_2 + 5t_1t_2)$. Find :

(i) $E(X)$, $E(Y)$

(ii) $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$

(iii) $\text{cov}(X, Y)$

- (b) যি কোনো যাদৃচ্ছিক চলক X , Y আৰু Z -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

For any random variables X , Y and Z , prove that

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$$

2

9. তলত দিয়াসমূহৰ সঠিক উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1 \times 2 = 2$

Choose the correct answer from the following :

- (a) দুৰ্বল বৃহৎ সংখ্যাৰ নিয়ম অনুসৰি sample mean কোনটো মানলৈ অভিসাৰিত হয়?

The weak law of large numbers states that the sample mean converges to the

- (i) নমুনাৰ বিচৰণ

sample variance

- (ii) জনসংখ্যাৰ গড়

population mean

- (iii) জনসংখ্যাৰ মধ্যক

population median

- (iv) মানক বিচ্যুতি

standard deviation

- (b) কেন্দ্ৰীয় সীমা উপপাদ্য অনুসৰি, বৃহৎ সংখ্যক স্বাধীন আৰু একে বিতৰণযুক্ত চলকৰ যোগফলৰ বিতৰণ কোনটো বিতৰণৰ ওচৰলৈ যায়?

According to the central limit theorem, the distribution of the sum of a large number of independent and identical distributive variables approach to

- (i) দ্বিপদ বিতৰণ

binomial distribution

- (ii) পয়ছন বিতৰণ

Poisson distribution

- (iii) স্বাভাৱিক বিতৰণ

normal distribution

- (iv) সূচকীয় বিতৰণ

exponential distribution

10. তলৰ প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা :

2×2=4

Answer the following questions :

(a) বৃহৎ সংখ্যাৰ সূত্র লিখা।

State the law of large numbers (LLN).

(b) বৃহৎ সংখ্যাৰ নিয়মৰ শক্তিশালী নিয়ম আৰু দুৰ্বল নিয়মৰ মাজত পাৰ্থক্য কি?

What is the difference between strong law and weak law of large numbers?

11. কেন্দ্ৰীয় সীমা উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা।

4

State and prove central limit theorem.

12. দুৰ্বল বৃহৎ সংখ্যাৰ নিয়ম আৰু শক্তিশালী বৃহৎ সংখ্যাৰ নিয়ম ব্যাখ্যা কৰা।

5

Interpret the weak law of large numbers and strong law of large numbers.

★★★