

6 SEM FYUGP MTHC6B

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(CORE)

Paper : MTHC6B

(Ring Theory and Linear Algebra—II)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. (a) মুখ্য আদর্শ আদিক্ষেত্র নোহোরা এটা অখণ্ড আদিক্ষেত্রের উদাহরণ দিয়া। 1

Give an example of an integral domain which is not a principal ideal domain.

- (b) যদি D এটা অখণ্ড আদিক্ষেত্র হয়, তেন্তে দেখুওরা যে $D[x]$ এটা অখণ্ড আদিক্ষেত্র। 3

If D is an integral domain, then show that $D[x]$ is an integral domain.

(2)

- (c) যদি F এখন ক্ষেত্র, $a \in F$ আৰু $f(x) \in F[x]$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $f(x)$ ক $(x-a)$ য়ে হৰণ কৰিলে বাকী $f(a)$ হয়।

4

If F is a field, $a \in F$ and $f(x) \in F[x]$, then prove that $f(a)$ is the remainder in the division of $f(x)$ by $(x-a)$.

2. (a) অলঘুকৰণীয় বহুপদৰ সংজ্ঞা লিখা। $f(x) = 2x^2 + 4$ বহুপদটো $Z[x]$ ত অলঘুকৰণীয় নে? যুক্তি দৰ্শোৱা।

1+2=3

Define irreducible polynomial. Is the polynomial $f(x) = 2x^2 + 4$ irreducible over $Z[x]$? Justify.

- (b) যদি $f(x) \in Z[x]$ আৰু $Q[x]$ ত $f(x)$ লঘুকৰণীয় হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে ই $Z[x]$ ত লঘুকৰণীয়।

4

If $f(x) \in Z[x]$ and $f(x)$ is reducible over $Q[x]$, then prove that it is reducible over $Z[x]$.

অথবা / Or

আইজেনষ্টাইনৰ ক্ৰাইটেৰিয়নটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

State and prove Eisenstein's criterion.

- (c) দেখুওৱা যে এটা অখণ্ড আদিক্ষেত্ৰত প্ৰত্যেকটো পূৰ্ণ মৌলবোৰ এটা অলঘুকৰণীয় মৌল হয়। ইয়াৰ বিপৰীত উক্তিটোও সঁচা নেকি? যুক্তি দৰ্শোৱা।

2+3=5

Show that in an integral domain every prime is irreducible. Is the converse true? Justify.

26P/1382

(Continued)

(3)

অথবা / Or

Euclidean আদিক্ষেত্ৰৰ এটা উদাহৰণ দিয়া। দেখুওৱা যে প্ৰত্যেকটো Euclidean আদিক্ষেত্ৰ এটা মুখ্য আদৰ্শ আদিক্ষেত্ৰ।

1+4=5

Give an example of an Euclidean domain. Show that every Euclidean domain is a principal ideal domain.

3. (a) যদি V এখন সদিশ সমষ্টি, তেন্তে ইয়াৰ দ্বৈত সমষ্টি V^* ৰ দ্বৈত আধাৰৰ সংজ্ঞা দিয়া।

2

If V is a vector space, then define the dual basis of the dual space V^* .

- (b) যদি $V(\mathbb{K})$ এটা সসীম আয়তনৰ সদিশ সমষ্টি আৰু V^* ইয়াৰ দ্বৈত সমষ্টি, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $V(\mathbb{K})$ is a finite dimensional vector space and V^* its dual space, then show that

$$\dim V = \dim V^*$$

3

- (c) যদি $T: V \rightarrow W$ এটা বৈধিক ফলন হয়, য'ত V আৰু W সদিশ সমষ্টি, তেন্তে T ৰ ট্ৰেন্সপ'জৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু দেখুওৱা যে ই বৈধিক।

3

For a linear transformation $T: V \rightarrow W$ where V and W are vector spaces, define transpose of T and show that it is linear.

26P/1382

(Turn Over)

(4)

অথবা / Or

যদি $B = \{1+i, 1-i\}$ এখন সন্ধি সমষ্টিৰ আধাৰ হয়, তেন্তে ইয়াৰ দ্বৈত আধাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

If $B = \{1+i, 1-i\}$ is a basis of a vector space, then find the dual basis of B .

(d) যদি $V(F)$ এখন সন্ধিৰ আয়তনৰ সন্ধি সমষ্টি হয় আৰু W ইয়াৰ এখন উপসন্ধি সমষ্টি, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $V(F)$ is a finite dimensional vector space and W a subspace of V , then show that

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ$$

য'ত (where) $W^\circ = W$ ৰ annihilator (annihilator of W).

4

অথবা / Or

যদি T_1^t আৰু T_2^t বৈধিক সংকাৰক T_1 আৰু T_2 ৰ ট্ৰেন্সপ'জ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

If T_1^t and T_2^t are the transposes of linear operators T_1 and T_2 , then show that

$$(i) T_1^t + T_2^t = (T_1 + T_2)^t, (ii) (T_1 T_2)^t = T_2^t T_1^t$$

(e) দেখুওৱা যে পৃথক আইজেন মানৰ বাবে থকা আইজেন ভেক্টৰবোৰ বৈধিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

4

Show that eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues are linearly independent.

26P/1382

(Continued)

(5)

(f) যদি বৈধিক সংকাৰক T কৰীয় সন্ধি হয় আৰু $c_i; 1 \leq i \leq n$ ইয়াৰ পৃথক আইজেন মান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে T ৰ মিনিমেল বহুপদী বাশি হ'ব

If T be a diagonalizable linear operator and $c_i; 1 \leq i \leq n$ be its distinct eigenvalues, then show that the minimal polynomial of T is

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

4

অথবা / Or

এখন সন্ধিৰ আয়তনৰ সন্ধি সমষ্টি V ত যদি T এটা বৈধিক সংকাৰক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে ইয়াৰ কেৰেক্টাৰিষ্টিক বহুপদী বাশি আৰু মিনিমেল বহুপদী বাশিৰ মূলবোৰ একে হ'ব।

If T is a linear operator on a finite dimensional vector space V , then show that the characteristic polynomial and minimal polynomial for T have the same roots.

4. (a) যদি $\mathbb{R}^4$ এখন অন্তঃগণক সমষ্টি য'ত

$$(a, b) = a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$\forall a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$$

আৰু যদি $a = (1, 2, 3, 1), b = (1, 1, -1, 3)$ হয় তেন্তে (a, b) ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

1

26P/1382

(Turn Over)

(6).

If $\mathbb{R}^4$ is an inner product space with the inner product given by

$$\langle a, b \rangle = a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$\forall a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$$

then find $\langle a, b \rangle$ if $a = (1, 2, 3, 1)$ and $b = (1, 1, -1, 3)$.

- (b) যদি V এখন সসীম আয়তনৰ অন্তঃগুণফল সমষ্টি হয় আৰু $S, T: V \rightarrow V$ দুটা বৈখিক সংকাৰক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$

য'ত, S^*, T^* হ'ল S, T ৰ এডজুইন্ট বৈখিক সংকাৰক।

3

If V is a finite dimensional inner product space and $S, T: V \rightarrow V$ two linear operators, then show that

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$

where S^*, T^* denote the adjoints of S, T .

- (c) যদি V এখন অন্তঃগুণফল সমষ্টি, তেন্তে দেখুওৱা যে

If V is an inner product space, then show that

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$$

3

- (d) দেখুওৱা যে লাম্বিক ভেক্টৰৰ সংহতি বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

3

Show that an orthonormal set of vectors is linearly independent in an inner product space.

(7)

- (e) যদি $\{u_1, \dots, u_n\}$ এটা সসীম লাম্বিক সংহতি আৰু $u \in V$, য'ত V এখন অন্তঃগুণফল সমষ্টি, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $\{u_1, \dots, u_n\}$ be any finite orthonormal set in an inner product space V and $u \in V$, then show that

$$\sum_{i=1}^n |\langle u, u_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

4

অথবা / Or

দেখুওৱা যে, এটা বৈখিক সংকাৰক $T: V \rightarrow V$, য'ত V এখন জটিল অন্তঃগুণফল সমষ্টি, হাৰ্মিছিয়ান হ'ব, যদি আৰু কেৱল যদি $\langle T(v), v \rangle$ বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব $\forall v \in V$.

Show that a linear operator T on an inner product space V will be Hermitian if and only if $\langle T(v), v \rangle$ is real $\forall v \in V$.

- (f) গ্ৰাম-স্মিটৰ ভেক্টৰৰ লম্বীকৰণ পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা।

6

Describe Gram-Schmidt orthogonalization.
