

2 SEM FYUGP MTHC 2

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC-2

(Real Analysis and Differential Equations)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2½ hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. x ৰ সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি A নিৰ্ধাৰণ কৰা যাতে
 $3x + 2 \leq 5$. 1
Determine the set A of all real numbers x
such that $3x + 2 \leq 5$.
2. এটা বাস্তৱ সংখ্যা a ৰ ε -neighbourhoodৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1
Define ε -neighbourhood of a real number a .

(2)

3. যদি a আৰু b দুটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad 2$$

If a and b be two positive real numbers, then prove that

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

4. (a) $\mathbb{R}$ ৰ সৰ্বোচ্চ ধৰ্মটো উল্লেখ কৰা। 1
State the supremum property of $\mathbb{R}$.

- (b) ধৰা হওক $S = \{1 - (-1)^n / n : n \in \mathbb{N}\}$. তেন্তে $\inf S$ আৰু $\sup S$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

Let $S = \{1 - (-1)^n / n : n \in \mathbb{N}\}$. Find $\inf S$ and $\sup S$.

- (c) যদি $t > 0$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে এনে এটা

$$n_t \in \mathbb{N} \text{ আছে যাতে } 0 < \frac{1}{n_t} < t. \quad 2$$

If $t > 0$, then prove that there exists

$$n_t \in \mathbb{N} \text{ such that } 0 < \frac{1}{n_t} < t.$$

26P/945

(Continued)

(3)

5. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 3

Answer any one :

- (a) যদি x আৰু y যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা হয়, ব'ত $x < y$, তেন্তে এটা পৰিস্ৰে সংখ্যা r থাকিব, যাতে $x < r < y$.

If x and y are any real numbers with $x < y$, then prove that there exists a rational number r such that $x < r < y$.

- (b) বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ গণনাযোগ্য নহয় বুলি প্রমাণ কৰা।

Prove that the set $\mathbb{R}$ of real numbers is not countable.

6. যদি $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ বদ্ধ সীমাবদ্ধ ব্যৱধানৰ এটা নেষ্টেড অনুক্রম, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে এটা সংখ্যা $\xi \in \mathbb{R}$ আছে ব'ত সকলো $n \in \mathbb{N}$ ৰ বাবে $\xi \in I_n$. 3

If $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ is a nested sequence of closed bounded intervals, then prove there exists a number $\xi \in \mathbb{R}$ such that $\xi \in I_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

7. এটা ধ্ৰুৱক অনুক্রমৰ উদাহৰণ দিয়া। 1
Give an example of a constant sequence.

8. প্রমাণ কৰা যে $\mathbb{R}$ ত থকা এটা অনুক্রমৰ সৰ্বাধিক এটা সীমাহে থাকিব পাৰে। 2

Prove that a sequence in $\mathbb{R}$ can have at most one limit.

26P/945

(Turn Over)

(4)

(5)

9. (a) $((-1)^n)$ অনুক্রমটো বিচ্ছিন্ন বুলি প্রমাণ কৰা। 2

Prove that the sequence $((-1)^n)$ is divergent.

- (b) $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$ অনুক্রমৰ সীমা নির্ণয় কৰা। 2

Find the limit of the sequence $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$.

10. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া : 4

Answer any one :

- (a) প্রমাণ কৰা যে যদি $X = (x_n)$ এটা বাস্তব সংখ্যাৰ অনুক্রম, তেন্তে X ৰ এটা উপঅনুক্রম আছে যিটো মনোটন।

Prove that if $X = (x_n)$ is a sequence of real numbers, then there is a subsequence of X that is monotone.

- (b) অনুক্রমৰ বাবে Bolzano-Weierstrass উপপাদ্যটো উল্লেখ আৰু প্রমাণ কৰা।

State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for sequence.

11. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া : 4

Answer any one :

- (a) দেখুওৱা যে 2-শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ অভিসৰণশীল।

Show that the 2-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent.

- (b) দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ শ্রেণীটো বিচ্ছিন্ন।

Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ is divergent.

12. এটা অৱকল সমীকৰণৰ স্পষ্ট আৰু অন্তৰ্নিহিত সমাধানৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define explicit and implicit solutions of a differential equation.

13. দেখুওৱা যে $y^2 dx + 2xy dy = 0$ এটা সঠিক অৱকল সমীকৰণ। 2

Show that $y^2 dx + 2xy dy = 0$ is an exact differential equation.

14. যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 4

Solve any one :

(i) $(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 2y) dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y + 4xy^2}{2x + 3x^2y}$

26P/945

(Continued)

26P/945

(Turn Over)

(6)

15. যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা :

4

Solve any one :

(i) $(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3) dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$

16. (a) যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা :

3

Solve any one :

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 25y = 0$

(b) সমাধান কৰা :

4

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

17. প্ৰাচলৰ ভেদ পদ্ধতিৰে যি কোনো এটা সমাধান কৰা :

4

Solve any one by the method of variation of parameters :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$

(ii) $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^x$

26P/945

(Continued)

(7)

18. অনিৰ্ণায়ক সহগ পদ্ধতিৰে যি কোনো এটা সমাধান কৰা :

4

Solve any one by the method of undetermined coefficient :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 2\sin x$

19. দেখুওৱা যে e^x আৰু e^{2x} , $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ সমীকৰণৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন সমাধান আৰু সেয়েহে সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

3

Show that e^x and e^{2x} are linearly independent solutions of $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ and hence write the general solution of the equation.

(২০২৬ চনৰ পৰীক্ষাৰ্থীৰ বাবে অতিৰিক্ত ২০ নম্বৰ)

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

20. যদি a আৰু b যি কোনো দুটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n আছে যাতে $na > b$ হয়।

5

If a and b are any two positive real numbers, then prove that there exists a positive integer n such that $na > b$.

26P/945

(Turn Over)

21. দেখুওৱা যে $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ অনুক্রমটো অভিসৰণশীল আৰু

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 2 আৰু 3ৰ মাজত আছে।

5

Show that the sequence $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ is

convergent and that $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lies between

2 and 3.

22. তলৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

5×2=10

Solve any two of the following :

(i) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

(ii) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$

(iii) $\frac{dr}{d\theta} + r \tan \theta = \cos \theta$
