Total No. of Printed Pages—8

4 SEM FYUGP MTHC4C

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4C

(Ring Theory and Linear Algebra I)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. (a) বিং এটাৰ 'ত্ৰিভিয়েল' উপ-বিঙৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define trivial subring of a ring.

(b) এটা সসীম অবিনিমেয় বিঙৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a finite non-commutative ring.

(c) ধৰা হওঁক, a, b আৰু c এটা বিং Rৰ অন্তৰ্গত। প্ৰমাণ কৰা যে $a(-b) = (-a)b = -ab$. 2

Let a, b and c belong to a ring R. Then prove that $a(-b) = (-a)b = -ab$.

(d) প্ৰতিটো মৌলিক সংখ্যা pৰ বাবে, প্ৰমাণ কৰা যে অখণ্ড সংখ্যাৰ ৰিং মডুলো p, Z_p এটা ক্ষেত্ৰ। 3

For every prime p, prove that the ring of integers modulo p, Z_p, is a field.

(e) ধৰা হওঁক R এটা ৰিং আৰু A হ'ল Rৰ এটা উপৰিং। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে কোছেটৰ সংহতি $\{r+A \mid r \in R\}$ হৈছে $(s+A)+(t+A)=s+t+A$ আৰু $(s+A)(t+A)=st+A$ নিয়মৰ অধীনত থকা এটা ৰিং, যদি আৰু যদিহে A, Rৰ ideal হয়। 5

Let R be a ring and let A be a subring of R. Then prove that the set of cosets $\{r+A \mid r \in R\}$ is a ring under the operations $(s+A)+(t+A)=s+t+A$ and $(s+A)(t+A)=st+A$ if and only if A is an ideal of R.

নাইবা / Or

ধৰা হওঁক R এটা একক থকা বিনিময় ৰিং আৰু A হ'ল Rৰ ideal। তেন্তে R/A এটা ক্ষেত্ৰ হ'ব যদি আৰু যদিহে A সৰ্বোচ্চ হয়।

Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R. Then R/A is a field if and only if A is maximal.

2. *(a)* ৰিং 'আইচ'মৰফিজম্'ৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define ring isomorphism.

(b) Z পৰা Z লৈ সকলো ৰিঙৰ সমৰূপতা নিৰ্ণয় কৰা। 3

Determine all ring homomorphisms from Z to Z.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অখণ্ড সংখ্যা nৰ দশমিক উপস্থাপন $a_k a_{k-1} \cdots a_0$, 9 ৰে বিভাজ্য হ'ব, যদি আৰু যদিহে $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$, 9 ৰে বিভাজ্য হয়। 3

Prove that an integer n with decimal representation $a_k a_{k-1} \cdots a_0$ is divisible by 9 if and only if $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$ is divisible by 9.

(d) ধৰা হওঁক R ৰিঙৰ একক 1। প্ৰমাণ কৰা যে মেপিং $\phi : Z \to R$, য'ত $n \to n \cdot 1$ এটা ৰিং সমৰূপতা। 3

Let R be a ring with unity 1. Prove that the mapping $\phi : Z \to R$ given by $n \to n \cdot 1$ is a ring homomorphism.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে Z_nৰ পৰা নিজলৈকে প্ৰতিটো ৰিং সমৰূপতা ϕৰ ৰূপ হ'ব $\phi(x)=ax$, য'ত $a^2=a$. 4

Prove that every ring homomorphism ϕ from Z_n to itself has the form $\phi(x)=ax$, where $a^2=a$.

নাইবা / Or

ধৰা হওঁক R হৈছে একক থকা এটা ৰিং আৰু ϕ হৈছে Rৰ পৰা S লৈ এটা ৰিঙৰ সমৰূপতা য'ত Sত এটাতকৈ অধিক মৌল আছে। Sৰ এটা একক আছে বুলি প্ৰমাণ কৰা।

Let R be a ring with unity and let ϕ be a ring homomorphism from R onto S where S has more than one element. Prove that S has a unity.

(f) ধৰা হওঁক R এটা ৰিং আৰু $J \subset I$, Rৰ ideals. তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে I/J হৈছে R/Jৰ ideal আৰু $\frac{R/J}{I/J} \cong R/I$. 4

Let R be a ring and let $J \subset I$ be ideals of R. Then prove that I/J is an ideal of R/J and $\frac{R/J}{I/J} \cong R/I$.

নাইবা / Or

যদি R একক থকা ৰিং আৰু Rৰ বৈশিষ্ট্য $n > 0$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে Rত Z_nৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে আৰু যদি Rৰ বৈশিষ্ট্য 0 হয়, তেন্তে Rত Zৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে।

If R is a ring with unity and the characteristics of R is $n > 0$, then prove that R contains a subring isomorphic to Z_n and if the characteristic of R is 0, then R contains a subring isomorphic to Z.

3. (a) "এটা ভেক্টৰ স্থানৰ এটাতকৈ অধিক শূন্য ভেক্টৰ থাকিব পাৰে।" সত্য নে অসত্য লিখা। 1

"A vector space may have more than one zero vectors." State true or false.

(b) শূন্য ভেক্টৰ থকা যি কোনো সংহতি ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল বুলি প্ৰমাণ কৰা। 2

Prove that any set containing the zero vector is linearly dependent.

(c) এটা ভেক্টৰ স্থান Vত দেখুওৱা যে যি কোনো $x, y, \in V$, আৰু যি কোনো $a \in F$ৰ বাবে $a(x+y) = ax + ay$. 2

In a vector space V, show that $a(x+y) = ax + ay$ for any $x, y, \in V$, and any $a \in F$.

(d) ভেক্টৰ স্থান Vৰ যি কোনো উপস্থানসমূহৰ ছেদন Vৰ উপস্থান বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Prove that any intersection of subspaces of a vector space V is a subspace of V.

(e) যদি এটা ভেক্টৰ স্থান V এটা সসীম সংহতি S দ্বাৰা সৃষ্টি কৰা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে Sৰ কিছুমান উপসংহতি Vৰ বাবে এটা ভিত্তি। 4

If a vector space V is generated by a finite set S, then prove that some subset of S is a basis for V.

নাইবা / Or

যদি U এটা সসীম-মাত্ৰিক ভেক্টৰ স্থান Vৰ এটা প্ৰকৃত উপস্থান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে Uৰ মাত্ৰা Vৰ মাত্ৰাতকৈ কম।

If U is a proper subspace of a finite-dimensional vector space V, show that the dimension of U is less than the dimension of V.

D PEOLI PHUKAN COLLEGE,
জন্মতু জন্মভূমি

4\. *(a)* এটা বৈখিক ৰূপান্তৰৰ কাৰ্ণেল আৰু পৰিসৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1+1=2

Define Kernel and range of a linear transformation.

(b) ধৰা হওঁক

$$T: R^2 \to R^2,\ T(a_1, a_2) = (2a_1 + a_2, a_1)$$

ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ। দেখুওৱা যে T বৈখিক। 2

Define

$$T: R^2 \to R^2 \text{ by } T(a_1, a_2) = (2a_1 + a_2, a_1)$$

Show that T is linear.

(c) ধৰা হওঁক A আৰু B, $n \times n$ মাত্ৰাৰ 'ইনভাৰচিবল' মৌলকক্ষ। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 2

Let A and B be $n \times n$ invertible matrices. Then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) ধৰা হওঁক $T: R^2 \to R^3$ হৈছে

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + 3a_2, 0, 2a_1 - 4a_2)$$

ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত এটা বৈখিক ৰূপান্তৰ। ধৰা হওঁক β আৰু γ ক্ৰমে R^2 আৰু R^3ৰ বাবে প্ৰামাণিক ক্ৰমবদ্ধ ভিত্তি। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3

Let $T: R^2 \to R^3$ is a linear transformation defined by

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + 3a_2, 0, 2a_1 - 4a_2)$$

Let β and γ be the standard ordered bases for R^2 and R^3 respectively. Then prove that

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(e) ধৰা হওঁক V আৰু W ভেক্টৰ স্থান আৰু $T: V \to W$ বৈখিক। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে শূন্য স্থান $N(T)$ আৰু পৰিসৰ $R(T)$ ক্ৰমে V আৰু Wৰ উপস্থান। 4

Let V and W be vector spaces and $T: V \to W$ be linear. Then prove that the null space $N(T)$ and range $R(T)$ are subspaces of V and W respectively.

(f) ধৰা হওঁক V আৰু W সসীম মাত্ৰিক ভেক্টৰ স্থান (একেটা ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত)। তেন্তে দেখুওৱা যে V, Wৰ সমৰূপী যদি আৰু যদিহে $\dim(V) = \dim(W)$ হয়। 5

Let V and W be finite dimensional vector spaces (over the same field). Then show that V is isomorphic to W if and only if $\dim(V) = \dim(W)$.

নাইবা / Or

$P_2(R)$ৰ বাবে ক্ৰমবদ্ধ ভিত্তি

$\beta = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\}$ আৰু $\beta' = \{1, x, x^2\}$,

তেন্তে β' স্থানাংকক β স্থানাংকলৈ সলনি কৰা স্থানাংক মৌলকক্ষ নিৰ্ণয় কৰা।

For the pairs of ordered bases

$\beta = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x^2\}$ and $\beta' = \{1, x, x^2\}$,

for $P_2(R)$, find the change of coordinate matrix that changes β' coordinates into β coordinates.

★★★