

2026

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4B

(Riemann Integration and Series of Functions)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. (a) যি কোনো সীমাবদ্ধ ফলন $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ বাবে দেখুওৱা যে $L(f, P) \leq U(f, P)$, য'ত P , $[a, b]$ ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন হয়। 2
- For any bounded function $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, show that $L(f, P) \leq U(f, P)$, where P is any partition of $[a, b]$.
- (b) ধৰা হ'ল $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ এটা সীমাবদ্ধ ফলন আৰু P আৰু Q , $[a, b]$ ৰ পাৰ্টিশ্যন হয় আৰু $P \subseteq Q$. দেখুওৱা যে $L(f, P) \leq L(f, Q)$. 3
- Let $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be bounded and P and Q are partitions of $[a, b]$ and $P \subseteq Q$. Show that $L(f, P) \leq L(f, Q)$.
- (c) যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ অনুকলনীয় হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে যি কোনো $\varepsilon > 0$, $\exists [a, b]$ ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন P পোৱা যায় যাতে $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. 3



(2)

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is integrable, then show that for any $\epsilon > 0, \exists$ a partition P of $[a, b]$ such that $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

(d) যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ অবিচ্ছিন্ন হয়, দেখুওৱা যে $f, [a, b]$ ত অনুকলনীয় হয়। 3

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, show that f is integrable on $[a, b]$.

অথবা / Or

যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ম'নটনিক হয়, দেখুওৱা যে $f, [a, b]$ ত অনুকলনীয় হয়।

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is monotonic, show that f is integrable on $[a, b]$.

(e) যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ অৱকলজীয় হয় আৰু $f', [a, b]$ ত অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad 4$$

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable and f' is integrable on $[a, b]$, show that

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

অথবা / Or

যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, [a, b]$ ত বীমান অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে $f, [a, b]$ ত সীমাবদ্ধ হয়।

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is Riemann integrable on $[a, b]$, show that f is bounded on $[a, b]$.

26P/1492

(Continued)

(3)

(f) যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ ত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে এটা বাস্তৱ সংখ্যা $c \in [a, b]$ পোৱা যায় যাতে

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c) \quad 4$$

Show that if $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous on $[a, b]$, then $\exists c \in [a, b]$ such that

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

অথবা / Or

যদি $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ সীমাবদ্ধ আৰু বীমান অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে $f, [a, b]$ ত ডাৰ্বিউ অনুকলনীয় হয়।

If $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is bounded and Riemann integrable, then show that f is Darboux integrable on $[a, b]$.

2. (a) p ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা। 3

Test the convergence of $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ for different values of p .

(b) গামা ফলনৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা আৰু $\Gamma(1) = 1$ হয় বুলি দেখুওৱা। 4+1=5

Test the convergence of gamma function and show that $\Gamma(1) = 1$.

অথবা / Or

বিটা ফলনৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা। 5

Test the convergence of beta function.

26P/1492

(Turn Over)



(4)

- (c) তলত দিয়াবোৰৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা
(যি কোনো এটা) : 3
Test the convergence of the following
(any one) :

(i) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

3. (a) $[0, 1]$ অন্তৰালত বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হোৱা ফলনৰ
অনুক্ৰমৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো সমমাত্ৰিক অভিসাৰী নহয়। 1
Give an example of a sequence of
functions on $[0, 1]$ which is pointwise
convergent but not uniformly
convergent.

- (b) প্রমাণ কৰা যে (f_n) অনুক্ৰমটো, য'ত
 $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, সমমাত্ৰিকভাৱে 0 লৈ $\mathbb{R}$ ত
অভিসাৰী হয়। 2

Show that the sequence of functions (f_n)
where $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ converges
uniformly to 0 on $\mathbb{R}$.

- (c) তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো চাৰিটা) : $4 \times 4 = 16$
Answer the following (any four) :

- (i) দেখুওৱা যে (f_n) অনুক্ৰমটো, য'ত

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ ত বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হয়।

26P/1492

(Continued)

(5)

Show that the sequence of
functions (f_n) , where

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

converges pointwise on $\mathbb{R}$.

- (ii) দেখুওৱা যে (f_n) , য'ত $f_n(x) = x^n$,
 $x \in [0, a]$, $a < 1$, সমমাত্ৰিকভাৱে $[0, a]$ ত
অভিসাৰী হয়।

Show that the sequence of
functions (f_n) where $f_n(x) = x^n$,
 $x \in [0, a]$, $a < 1$ is uniformly
convergent on $[0, a]$.

- (iii) ধৰা হ'ল $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ আৰু (f_n) এটা $[a, b]$
অন্তৰালত অনুকলনীয় ফলনৰ অনুক্ৰম। ধৰা হ'ল
 $[a, b]$ অন্তৰালত $f_n \rightarrow f$ হয়। দেখুওৱা যে
 $[a, b]$ ত f অনুকলনীয় হয়।

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ and (f_n) be a
sequence of integrable functions on
 $[a, b]$. Let $f_n \rightarrow f$ on $[a, b]$. Show that
 f is integrable on $[a, b]$.

- (iv) দেখুওৱা যে $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ শ্ৰেণীটো $(0, 1)$ ত $\frac{1}{1-x}$

লৈকে বিন্দুমাট্ৰিক অভিসাৰী হয় কিন্তু সমমাত্ৰিক
অভিসাৰী নহয়।

26P/1492

(Turn Over)



(6)

Show that the series of functions

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is pointwise convergent to $\frac{1}{1-x}$ on $[0,1)$ but not uniformly convergent on $[0, 1)$.

(v) ধৰা হ'ল $\sum f_n$ বাস্তৱ শ্ৰেণীটো X অধিক সংহতিত সমমাত্ৰিক অভিসাৰী হয়। দেখুওৱা যে যি কোনো $\varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ যাতে

$$n \geq m \geq K \Rightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in X$. ইয়াৰ পৰা আকৌ দেখুওৱা যে

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots, x \in [0,1]$$

শ্ৰেণীটো $[0,1]$ ত সমমাত্ৰিক অভিসাৰী হয়।

Let the series of real functions $\sum f_n$ be uniformly convergent on a non-empty set X . Show that for given $\varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ s.t.

$$n \geq m \geq K \Rightarrow |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in X$. Hence show that the series

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots, x \in [0,1]$$

is uniformly convergent on $[0,1]$.

(Continued)

(7)

4. (a) যদি (x_n) অনুক্রমটো

$$(2, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$$

হয়, তেন্তে $\limsup (x_n)$ উলিওৱা।

1

Find $\limsup (x_n)$, where (x_n) is the sequence

$$(2, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$$

(b) সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ৰ অভিসাৰিতাব ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱা।

2

Find the radius of convergence of the power series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(c) তলত দিয়াবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো দুটা) : $4 \times 2 = 8$

Answer the following (any two) :

(i) ধৰা হ'ল $0 < R \leq \infty$ আৰু $\forall x$, য'ত

$$|x-a| < R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

ফলনটো লৈ $(-r, r)$ -ত, $\forall 0 < r < R$, সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী হয়। দেখুওৱা যে $(-R, R)$ ত f অবিচ্ছিন্ন, আৰু অৱকলনীয় হয়

$$\text{য'ত } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Let $0 < R \leq \infty$ and for all x with $|x-a| < R$, the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

(Turn Over)

converges uniformly to a function f on $(-r, r) \forall 0 < r < R$. Show that f is continuous and differentiable on $(-R, R)$ with $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

(ii) ধরা হ'ল $\varepsilon > 0$, আৰু $X = [-1, 1 - \varepsilon]$.

দেখুওৱা যে

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

সূচক শ্ৰেণীটো X ত সমমাত্রিকভাৱে অভিসাৰী হয়।

Let $\varepsilon > 0$, and $X = [-1, 1 - \varepsilon]$. Show that the power series

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

is uniformly convergent on X .

(iii) যদি $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেন্তে

দেখুওৱা যে $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ সূচক শ্ৰেণীটো $[0, 1]$ ত

সমমাত্রিকভাৱে অভিসাৰী হয়।

If the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges, then

show that the power series

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges uniformly on

$[0, 1]$.