Total No. of Printed Pages—7

5 SEM FYUGP MTHC5B

2025

(November)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC5B

(Group Theory–II)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* বৈশিষ্ট্যযুক্ত উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define characteristic subgroup.

(b) যদি $G = \langle a \rangle$ আৰু $a^{12} = e$ হয়, Aut(G) উলিওৱা। 2

Find Aut(G), if $G = \langle a \rangle$ and $a^{12} = e$.

(c) ধৰা হ'ল $f : G \to G$ যাতে $f(a) = a^n$ এটা অট'মৰফিজম। দেখুওৱা যে গোট Gৰ সকলো aৰ বাবে $a^{n-1} \in Z(G)$, য'ত $Z(G)$ হ'ল গোট Gৰ কেন্দ্ৰ। 3

Let $f: G \to G$ defined as $f(a) = a^n$ be an automorphism. Show that $a^{n-1} \in Z(G)$ for all $a \in G$, where $Z(G)$ is the centre of the group G.

(d) ধৰা হ'ল G গোটৰ G' হ'ল এটা কমিউটেটৰ উপগোট। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, G আবেলিয়ান হ'ব যদি আৰু যদিহে $G' = \{e\}$. 3

Let G' be the commutator subgroup of a group G. Then prove that G is Abelian if and only if $G' = \{e\}$.

(e) ধৰা হ'ল G এটা গোট, H গোট Gৰ এটা উপগোট আৰু T গোট Gৰ এটা অট'মৰফিজম। প্ৰমাণ কৰা যে $T(H) = \{T(h) : h \in H\}$, G গোটটোৰ এটা উপগোট। ইয়াৰোপৰি, যদি গোট Gৰ H এটা সাধাৰণ উপগোট হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $T(H)$, গোট Gৰ এটা সাধাৰণ উপগোট হ'ব। 2+2=4

Let G be a group, H a subgroup of G and T an automorphism of G. Prove that $T(H) = \{T(h) : h \in H\}$ is a subgroup of G. Further, show that if H is a normal subgroup of G, then $T(H)$ is also a normal subgroup of G.

(f) ধৰা হ'ল $\text{Inn}(G)$, গোট Gৰ সকলোবোৰ আভ্যন্তৰীণ অট'মৰফিজমৰ সংহতি, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{G}{Z(G)} \cong \text{Inn}(G)$. 6

Let $\text{Inn}(G)$ be the set of all inner automorphisms on a group G, then prove that $\frac{G}{Z(G)} \cong \text{Inn}(G)$.

অথবা / Or

যদি G এটা অসীম বৃত্তীয় গোট হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\text{Aut}(G)$, দ্বিতীয়ক্ৰমৰ বৃত্তীয় গোটৰ সৈতে সমৰূপীত।

If G is an infinite cyclic group, then show that $\text{Aut}(G)$ is isomorphic to a cyclic group of order 2.

2. (a) 48 ক্ৰমৰ এটা অ-আবেলিয়ান গোটৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of non-Abelian group of order 48.

(b) একক মৌল নোহোৱা $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3$ৰ যি কোনো এটা মৌলৰ ক্ৰম কিমান হ'ব? 2

What is the order of any non-identity element in $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3$?

(c) $Z_5 \oplus Z_{15}$ত থকা 5 ক্ৰমৰ মৌলৰ সংখ্যা কিমান উলিওৱা। 3

Find the number of elements of order 5 in $Z_5 \oplus Z_{15}$.

(d) $U(165)$ আৰু $U(720)$ক Z_n আকাৰৰ বৃত্তীয় যোগাত্মক গোটৰ বাহ্যিক প্ৰত্যক্ষ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা। 2+2=4

Express $U(165)$ and $U(720)$ as external direct product of cyclic additive groups of the form Z_n.

(e) যদি G এটা সসীম আবেলিয়ান গোট হয় আৰু $m|O(G)$, তেন্তে দেখুওৱা যে Gৰ এটা m ক্ৰমৰ উপগোট থাকিব। 5

If G is a finite Abelian group and $m|O(G)$, then show that G has a subgroup of order m.

অথবা / Or

যদি G গোট, এটা সসীম সংখ্যক উপগোট $H_1, H_2, \ldots, H_n$ৰ আভ্যন্তৰীণ প্ৰত্যক্ষ পূৰণফল হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে G গোটটো $H_1, H_2, \ldots, H_n$ৰ বাহ্যিক প্ৰত্যক্ষ পূৰণফলৰ সৈতে সমৰূপীত।

If a group G is the internal direct product of a finite number of subgroups $H_1, H_2, \ldots, H_n$, then prove that G is isomorphic to the external direct product of $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

3. (a) ধৰা হ'ল G গোটৰ ক্ৰম p^2 য'ত p মৌলিক সংখ্যা। তেন্তে দেখুওৱা যে G আবেলিয়ান। 2

Let G be a group of order p^2, where p is a prime number. Then show that G is Abelian.

(b) S_3ৰ শ্ৰেণী সমীকৰণটো উলিওৱা। 2

Find the class equation of S_3.

(c) ধৰা হ'ল $* : G \times A \to A$ এটা গোট ক্ৰিয়া। তেন্তে দেখুওৱা যে এই ক্ৰিয়াৰ kernelয়ে Gৰ এটা উপগোট গঠন কৰে। 3

Let $* : G \times A \to A$ be a group action. Then show that kernel of this action forms a subgroup of G.

(d) যদি $\sigma = (12)(345)$, $\tau = (123)(45) \in S_5$, তেন্তে σ আৰু τ সংযুগ্ম হয়নে নিৰ্ধাৰণ কৰা। লগতে যদি ইহঁত সংযুগ্ম হয়, তেন্তে এটা মৌল $\rho \in S_5$ বিচাৰি উলিওৱা যাতে $\rho \sigma \rho^{-1} = \tau$ হয়। 3

If $\sigma = (12)(345)$, $\tau = (123)(45) \in S_5$, then determine whether σ and τ are conjugate. Further, if they are conjugate, then find an element $\rho \in S_5$ such that $\rho \sigma \rho^{-1} = \tau$.

(e) ধৰা হ'ল G এটা গোট। প্ৰমাণ কৰা যে $\rho(g, a) = g \cdot a = gag^{-1}$ ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত $\rho: G \times G \to G$ ফলনটো এটা গোট ক্ৰিয়া। যদিহে G আবেলিয়ান হয়, তেন্তে এই ক্ৰিয়াটো ট্ৰিভিয়েল ক্ৰিয়া হয়নে? ইয়াৰ কাৰ্নেল আৰু ষ্টেবিলাইজাৰ Ga উলিওৱা। 2+1+2=5

Let G be a group. Prove that the mapping $\rho: G \times G \to G$ defined by $\rho(g, a) = g \cdot a = gag^{-1}$ is a group action. Is this action a trivial action if G is Abelian? Find its kernel and stabilizer Ga.

অথবা / Or

ধৰা হ'ল G এটা গোট আৰু $O(G) = p^n$ য'ত p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $n \geq 1$। তেন্তে দেখুওৱা যে $Z(G) \neq \{e\}$. 5

Let G be a group and $O(G) = p^n$, where p is a prime number and $n \geq 1$. Then show that $Z(G) \neq \{e\}$.

4. (a) "56 ক্ৰমৰ গোট এটা সৰল।" কথাষাৰ সঁচানে? 1

"A group of order 56 is simple." Is this statement true?

(b) S_3ৰ সকলো চাইল' 3-উপগোটবোৰ উলিওৱা। 2

Find all Sylow 3-subgroups of S_3.

(c) ধৰা হ'ল G গোটৰ ক্ৰম pq য'ত p আৰু q মৌলিক সংখ্যা যাতে $p < q$ আৰু $p \nmid q-1$। তেন্তে দেখুওৱা যে G এটা বৃত্তীয় গোট। 3

Let G be a group of order pq, where p and q are primes such that $p < q$ and $p \nmid q-1$. Then show that G is a cyclic group.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে এটা সসীম গোট Gৰ যি কোনো দুটা চাইল' p-উপগোট গোট Gত সংযুগ্ম হয়। 5

Prove that any two Sylow p-subgroups of a finite group G are conjugate in G.

অথবা / Or

ধৰা হ'ল G এটা সসীম গোট। দেখুওৱা যে গোট Gৰ চাইল' p-উপগোটৰ সংখ্যা $1+kp$ আকাৰৰ হয়, য'ত $1+kp|O(G)$ আৰু $k \geq 0$.

Let G be a finite group. Show that the number of Sylow p-subgroups of G is of the form $1+kp$, where $1+kp|O(G)$ and $k \geq 0$.

★★★