Total No. of Printed Pages—7

3 SEM FYUGP MTHC3A

2 0 2 5

(Nov/Dec)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3A

(Theory of Real Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) বাস্তৱ সংখ্যাৰ সসীম উপসংহতি এটাৰ কিয় গুচ্ছ বিন্দু নাথাকে, ব্যাখ্যা কৰা। 1

Explain why a finite subset of real numbers does not have a cluster point.

(b) যদি (If)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

য'ত (where)

$$f : A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে f ফলনটো cৰ কোনো এক প্ৰতিবেশত আবদ্ধ হ'ব। 2

then show that the function f is bounded on some neighbourhood of c.

অথবা / Or

$|x-1|$ত এটা চৰ্ত নিৰূপণ কৰা যিটোৱে নিশ্চিত কৰিব যে

Determine a condition on $|x-1|$ that will assure that

$$|x^2-1|<\frac{1}{2}$$

(c) স্কুইজ প্ৰমেয় ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Use squeeze theorem to show that

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ 3

(d) যদি $c\in\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$ৰ এক গুচ্ছ বিন্দু হয়, $f:A\to\mathbb{R}$ আৰু যদি (i) $\lim_{x\to c}f(x)>0$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f(x)>0 \quad \forall x\in A\cap V_\delta(c)$$

আৰু যদি (ii) $\lim_{x\to c}f(x)<0$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f(x)<0 \quad \forall x\in A\cap V_\delta(c)$$ 5

If $c\in\mathbb{R}$ is a cluster point of $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ and if (i) $\lim_{x\to c}f(x)>0$, then show that

$$f(x)>0 \quad \forall x\in A\cap V_\delta(c)$$

and if (ii) $\lim_{x\to c}f(x)<0$, then show that

$$f(x)<0 \quad \forall x\in A\cap V_\delta(c)$$

2. (a) দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক বহুপদীয় ফলন অবিচ্ছিন্ন। 2

Show that every polynomial function is continuous.

(b) যদি $f(x)\ge 0\ \forall x\in A$ য'ত $f:A\to\mathbb{R}$; $A\subseteq\mathbb{R}$ আৰু $(\sqrt{f})(x):=\sqrt{f(x)}$; $x\in A$ আৰু f যদি Aত অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে $\sqrt{f}$, Aত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

If $f(x)\ge 0\ \forall x\in A$ where $f:A\to\mathbb{R}$; $A\subseteq\mathbb{R}$ and $(\sqrt{f})(x):=\sqrt{f(x)}$; $x\in A$ and f is continuous on A, then $\sqrt{f}$ is continuous on A.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে ডিৰিক্লেটৰ ফলন বিচ্ছিন্ন।

Show that Dirichlet's function is discontinuous for all real numbers.

(c) দিয়া আছে $f:A\to\mathbb{R}$; $A\subseteq\mathbb{R}$, $c\in A$ত অবিচ্ছিন্ন। যদি $\forall\varepsilon>0$, cৰ এক δ-প্ৰতিবেশ $V_\delta(c)$ থাকে যাতে যদি $x, y\in V_\delta(c)\cap A$, তেন্তে দেখুওৱা যে

Given $f:A\to\mathbb{R}$; $A\subseteq\mathbb{R}$ is continuous at $c\in A$. If $\forall\varepsilon>0\ \exists$ a δ-nbd $V_\delta(c)$ of c s.t. if $x, y\in V_\delta(c)\cap A$, then show that

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$ 3

(d) অৱস্থিতি মূল প্ৰমেয় সাধাৰণীকৃত কৰিলে পোৱা উপপাদ্যৰ বিবৃতি দি ইয়াক প্ৰমাণ কৰা। 1+2=3

State the theorem found on generalization of the location of roots theorem and prove it.

অথবা / Or

যদি $f, g : A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ সুষমভাৱে Aত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f + g$ ও Aত সুষমভাৱে অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

If $f, g : A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ both are uniformly continuous on A, then show that $f + g$ is also uniformly continuous on A.

3. (a) $f(x) = |x|$ ফলনটোৰ আপেক্ষিক চৰম মান কি হ'ব? চৰম মানৰ সংজ্ঞাৰ সহায়ত প্ৰতিপন্ন কৰা। 2

What is the relative extremum of $f(x) = |x|$? Justify with the help of definition of extremum.

(b) যদি $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ অৱকলনীয় হয় আৰু $|f'(x)| < M$; $M > 0$ $\forall x \in (a, b)$, তেন্তে দেখুওৱা যে f সুষমভাৱে (a, b)ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

If $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ is differentiable and $|f'(x)| < M$; $M > 0$ $\forall x \in (a, b)$, then show that f is uniformly continuous on (a, b).

(c) ধৰা হওক $f : I \to \mathbb{R}$, য'ত I এটা অন্তৰাল, অৱকলনীয়। দেখুওৱা যে, f হ্ৰাসমান ফলন হ'ব যদি আৰু যদিহে $f'(x) \le 0$ $\forall x \in I$. 3

Let $f : I \to \mathbb{R}$, where I is an interval, be differentiable. Show that f is decreasing if and only if $f'(x) \le 0$ $\forall x \in I$.

অথবা / Or

মধ্যমান প্ৰমেয় ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Use mean value theorem to show that

$$-x \le \sin x \le x \ \forall x \ge 0$$

(d) যদি $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $f'(x) \ne 0$, $x \in (0, 1)$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is continuous and $f'(x) \ne 0$ for $x \in (0, 1)$, then show that

$$f(0) \ne f(1)$$ 3

(e) যদি (If)

$$f(x) = \log x \, ; \ x \in [a, b] \, ; \ 0 < a < b$$

তেন্তে দেখুওৱা যে

then show that

$$\frac{b-a}{b} < \log x < \frac{b-a}{a}$$ 4

(f) চৰম মান নিৰ্ণয়ৰ প্ৰথম অৱকলজ পৰীক্ষাৰ বিবৃতি লিখি প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove the first derivative test for detection of extremum.

4. *(a)* ক'চিৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া। 2

State the geometrical interpretation of Cauchy's mean value theorem.

(b) যদি $f,\ g: I \to \mathbb{R}$, য'ত I এটা অন্তৰাল, উত্তল ফলন হয়, $f+g$ সম্পৰ্কত তোমাৰ মত প্ৰকাশ কৰা। প্ৰয়োজনীয় যুক্তি প্ৰদৰ্শন কৰিবা। 1+2=3

If $f,\ g: I \to \mathbb{R}$, where I is an interval, are convex functions, what is your opinion about $f+g$? Justify with reason.

(c) $\tan^{-1} x$ ৰ বাবে মেক্ল'ৰিণৰ শ্ৰেণী নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে

Find Maclaurin's series for $\tan^{-1} x$ and deduce that

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$ 3

(Continued)

(d) $f(x) = x^3$ ৰ আপেক্ষিক চৰম মান আছে নে নাই, অনুসন্ধান কৰা। 3

Investigate whether $f(x) = x^3$ has a relative extreme value or not.

(e) দেখুওৱা যে যদি $x > 0$, তেন্তে

Show that if $x > 0$, then

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \le \sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x$$ 3

(f) টেইলৰৰ উপপাদ্য লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Taylor's theorem.

★★★