Total No. of Printed Pages—7

3 SEM FYUGP MTHC3B

2025

(Nov/Dec)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3B

(Group Theory—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* *n* ক্ৰমৰ চক্ৰীয় ঘূৰ্ণন গোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define cyclic rotation group of order *n*.

(b) D_3ৰ বাবে এটা সম্পূৰ্ণ Cayley তালিকা উপস্থাপন কৰা। D_3 এবেলিয়ান হয়নে? 3+1=4

Write out a complete Cayley table for D_3. Is D_3 abelian?

(c) প্ৰমাণ কৰা যে কোৱাটাৰনিয়ন গোটটো এবেলিয়ান নহয়। 5

Prove that quaternion group is not abelian.

অথবা / *Or*

G গোট এটাৰ ক্ষেত্ৰত তলত দিয়াবোৰ প্ৰমাণ কৰা : 2+3=5

In a group G, prove the following :

(i) মাত্ৰ এটা identity মৌল থাকে।

There is only one identity element.

(ii) সোঁ আৰু বাওঁ বাতিলৰ সূত্ৰ প্ৰযোজ্য হয়।

The right and left cancellation laws hold.

2. *(a)* এটা গোটৰ কেন্দ্ৰ সংজ্ঞায়িত কৰা। 1

Define center of a group.

(b) ধৰা হওক G এটা গোট আৰু H এটা Gৰ অৰিক্ত উপসংহতি। যদি ab^{-1}, Hত থাকে য'ত a আৰু b, Hত থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে H, Gৰ এটা উপগোট। 3

Let G be a group and H a non-empty subset of G. If ab^{-1} is in H whenever a and b are in H, then prove that H is a subgroup of G.

(c) যি কোনো গোটত এটা মৌল আৰু ইয়াৰ বিপৰীতমুখী মৌলৰ ক্ৰম একে বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Prove that in any group, an element and its inverse have the same order.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে 2 ক্ৰমৰ দুটা মৌল থকা এটা এবেলিয়ান গোটৰ 4 ক্ৰমৰ এটা উপগোট থাকেই। 4

Prove that an abelian group with two elements of order 2 must have a subgroup of order 4.

অথবা / *Or*

ধৰা হওক G এটা গোট আৰু H, Gৰ এটা উপগোট। যদি $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $N(H)$, Gৰ এটা উপগোট।

Let G be a group and let H be a subgroup of G. If

$$N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

then prove that $N(H)$ is a subgroup of G.

3. *(a)* "এটা সসীম চক্ৰীয় গোটত, এটা মৌলৰ ক্ৰমে গোটটোৰ ক্ৰমক বিভাজিত নকৰে।" শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা। 1

"In a finite cyclic group, the order of an element does not divide the order of the group." Write True or False.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো চক্ৰীয় গোট এটা এবেলিয়ান গোট। 2

Prove that every cyclic group is an abelian group.

(c) মৌলিক ক্ৰমৰ প্ৰতিটো গোট চক্ৰীয় বুলি প্ৰমাণ কৰা। 4

Prove that every group of prime order is cyclic.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে চক্ৰীয় গোটৰ প্ৰতিটো উপগোট চক্ৰীয়।

Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে এটা সসীম গোটৰ প্ৰতিটো ক্ৰমবিন্যাসক এটা চক্ৰ বা বিচ্ছিন্ন চক্ৰৰ গুণফল হিচাপে লিখিব পাৰি। 4

Prove that every permutation of a finite set can be written as a cycle or as a product of disjoint cycles.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে n ডিগ্ৰীৰ সকলো যুগ্ম ক্ৰমবিন্যাসৰ A_n গোটটোৱে ক্ৰমবিন্যাস গুণনৰ সাপেক্ষে $\frac{n!}{2}$ ক্ৰমৰ এটা সসীম গোট গঠন কৰে।

Prove that the set A_n of all even permutations of degree n forms a finite group of order $\frac{n!}{2}$ with respect to permutation multiplication.

(e) যদি G এটা সসীম গোট আৰু H, Gৰ এটা উপগোট, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $|G|$, $|H|$ৰে বিভাজ্য। 5

If G is a finite group and H is a subgroup of G, then prove that $|H|$ divides $|G|$.

অথবা / Or

Fermat's little উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

State and prove Fermat's little theorem.

4. (a) গোটসমূহৰ বাহ্যিক প্ৰত্যক্ষ গুণফলৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা উদাহৰণ দিয়া। 1+1=2

Define external direct product of groups. Give an example.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে $Z \oplus Z$ এটা চক্ৰীয় গোট নহয়। 2

Prove that $Z \oplus Z$ is not a cyclic group.

(c) সসীম সংখ্যক সসীম গোটৰ প্ৰত্যক্ষ গুণফলত থকা এটা মৌলৰ ক্ৰম মৌলটোৰ উপাদানসমূহৰ ক্ৰমৰ লঘিষ্ঠ সাধাৰণ গুণিতক বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Prove that the order of an element in a direct product of a finite number of finite groups is the least common multiple of the orders of the components of the element.

(d) ধৰা হওক G আৰু H সসীম চক্ৰীয় গোট। প্ৰমাণ কৰা যে $G \oplus H$ চক্ৰীয় যদি আৰু যদিহে $|G|$ আৰু $|H|$ পৰস্পৰ মৌলিক হয়। 4

Let G and H be finite cyclic groups. Prove that $G \oplus H$ is cyclic if and only if $|G|$ and $|H|$ are relatively prime.

অথবা / Or

সসীম এবেলিয়ান গোটৰ বাবে ক'চিৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian groups.

5. (a) এটা সমৰূপতাৰ কাৰ্ণেল সংজ্ঞায়িত কৰা। 1

Define kernel of a homomorphism.

(b) ধৰা হওক ϕ এটা G গোটৰ পৰা $\overline{G}$ গোটলৈ সমৰূপতা আৰু g, Gৰ এটা মৌল। প্ৰমাণ কৰা যে যদি $|g|$ সসীম, তেন্তে $|g|$, $|\phi(g)|$ ৰে বিভাজ্য। 2

Let ϕ be a homomorphism from a group G to a group $\overline{G}$ and let g be an element of G. Then prove that if $|g|$ is finite, then $|\phi(g)|$ divides $|g|$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে $Z_8 \oplus Z_2$ৰ পৰা $Z_4 \oplus Z_4$ লৈ কোনো সমৰূপতা নাই। 3

Prove that there is no homomorphism from $Z_8 \oplus Z_2$ onto $Z_4 \oplus Z_4$.

(d) ধৰা হওক ϕ, Gৰ পৰা $\overline{G}$ লৈ এটা গোট সমৰূপতা। প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{G}{\ker\phi}$ৰ পৰা $\phi(G)$ লৈ, $g\ker\phi \to \phi(g)$ দ্বাৰা দিয়া মেপিংটো এটা সমৰূপতা হয়। 5

Let ϕ be a group homomorphism from G to $\overline{G}$. Then prove that the mapping from $\frac{G}{\ker\phi}$ to $\phi(G)$, given by $g\ker\phi \to \phi(g)$, is an isomorphism.

অথবা / Or

G এটা গোট আৰু Hক Gৰ যি কোনো উপগোট বুলি ধৰা হওক। যদি N, Gৰ যি কোনো নৰ্মেল উপগোট হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

Let G be a group and let H be any subgroup of G. If N is any normal subgroup of G, then prove that $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

★★★