Total No. of Printed Pages—8

4 SEM FYUGP MTHC4C

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4C

(Ring Theory and Linear Algebra I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* ৰিং এটাত এককৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define unity in a ring.

(b) এটা ৰিঙৰ উপসংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যি যোগৰ সাপেক্ষে এটা উপগোট কিন্তু উপৰিং নহয়। 2

Give an example of a subset of a ring that is a subgroup under addition but not a subring.

(c) এটা সসীম অখণ্ড ড'মেইন এটা ক্ষেত্ৰ বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Prove that a finite integral domain is a field.

(d) এটা ৰিঙৰ বৈশিষ্ট্য সংজ্ঞায়িত কৰা। ধৰা হওক R একক 1 থকা এটা আঙঠি। প্ৰমাণ কৰা যে যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত অসীম ক্ৰম থাকে, তেন্তে Rৰ বৈশিষ্ট্য 0 আৰু যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত n ক্ৰম থাকে, তেন্তে Rৰ বৈশিষ্ট্য n. 2+3=5

Define characteristic of a ring. Let R be a ring with unity 1. Prove that if 1 has infinite order under addition, then the characteristic of R is 0 and if 1 has order n under addition, then the characteristic of R is n.

নাইবা / Or

Prime Ideal আৰু Maximal Idealৰ সংজ্ঞা দিয়া। Rক একক থকা এটা কমিউটেটিভ ৰিং বুলি ধৰা হওক আৰু Aক Rৰ ideal. প্ৰমাণ কৰা যে R/A এটা integral domain যদি আৰু কেৱল যদি A মৌলিক হয়। 5

Define Prime Ideal and Maximal Ideal. Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R. Then prove that R/A is an integral domain if and only if A is prime.

2. (a) "ধৰা হওক R বৈশিষ্ট্য 2ৰ এটা বিনিময় ৰিং। তেতিয়া $a \to a^2$ মেপিং Rৰ পৰা R লৈ আঙঠি সমৰূপতা নহয়।" সত্য নে অসত্য লিখা। 1

"Let R be a commutative ring of characteristic 2. Then the mapping $a \to a^2$ is not a ring homomorphism from R to R." State True or False.

(b) ধৰা হওক R এটা একক 1 থকা এটা আঙঠি। $n \to n.1$ দ্বাৰা দিয়া মেপিং $f : Z \to R$ এটা ৰিঙৰ সমৰূপতা বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Let R be a ring with unity 1. Prove that the mapping $f : Z \to R$ given by $n \to n.1$ is a ring homomorphism.

(c) $Z \oplus Z$ৰ পৰা Z লৈ সকলোবোৰ ৰিঙৰ সমৰূপতা উলিওৱা। 3

Determine all ring homomorphisms from $Z \oplus Z$ to Z.

(d) ধৰা হওক D এটা অবিচ্ছেদ্য ড'মেইন। প্ৰমাণ কৰা যে এটা ক্ষেত্ৰ F আছে য'ত Dৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে। 4

Let D be an integral domain. Then prove that there exists a field F that contains a subring isomorphic to D.

নাইবা / Or

Rক একক থকা এটা ৰিং আৰু ϕক Rৰ Sৰ ওপৰত এটা ৰিঙৰ সমৰূপতা বুলি ধৰা হওক য'ত Sৰ এটাতকৈ অধিক মৌল আছে। Sৰ এটা একক আছে বুলি প্ৰমাণ কৰা।

Let R be a ring with unity and let ϕ be a ring homomorphism from R onto S where S has more than one element. Prove that S has a unity.

(e) যদি R একক থকা ৰিং আৰু Rৰ বৈশিষ্ট্য $n > 0$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে R ত Z_nৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে আৰু যদি Rৰ বৈশিষ্ট্য 0 হয়, তেন্তে Rত Zৰ সমৰূপী এটা উপৰিং থাকে। 4

If R is a ring with unity and the characteristic of R is $n > 0$, then prove that R contains a subring isomorphic to Z_n and if the characteristic of R is 0, then R contains a subring isomorphic to Z.

(f) যদি F বৈশিষ্ট্য pৰ এটা ক্ষেত্ৰ হয়, তেন্তে Fত এটা Z_pৰ সমৰূপী উপক্ষেত্ৰ থাকে। যদি F, 0 বৈশিষ্ট্যৰ এটা ক্ষেত্ৰ হয়, তেন্তে Fত পৰিমেয় সংখ্যাৰ সমৰূপী এটা উপক্ষেত্ৰ থাকে। 4

If F is a field of characteristic p, then F contains a subfield isomorphic to Z_p. If F is a field of characteristic 0, then show that F contains a subfield isomorphic to the rational numbers.

নাইবা / Or

ধৰা হওক nৰ দশমিক উপস্থাপন $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$. প্ৰমাণ কৰা যে n, 11ৰে বিভাজ্য হ'ব যদি আৰু যদিহে $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots (-1)^k a_k$, 11ৰে বিভাজ্য হয়।

Let n be an integer with decimal representation, $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$. Prove that n is divisible by 11 if and only if $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots (-1)^k a_k$ is divisible by 11.

3. (a) যদি S এটা ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল ভেক্টৰৰ গোট, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে Sত থকা এটা ভেক্টৰ আনবোৰৰ ৰৈখিক সংমিশ্ৰণ। 3

If S is a linearly dependent set of vectors, prove that one of the vectors in S is a linear combination of the others.

(b) যদি V, 5 মাত্ৰাৰ Fৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান আৰু U আৰু W, 3 মাত্ৰাৰ Vৰ উপভেক্টৰ স্থান হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $U \cap W \neq \{0\}$. 4

If V is a vector space over F of dimension 5 and U and W are subspaces of V of dimension 3, prove that $U \cap W \neq \{0\}$.

নাইবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে n মাত্ৰাৰ Fৰ ওপৰত এটা সসীম-মাত্ৰিক ভেক্টৰ স্থান Vৰ $(n+1)$ বা তাতকৈ অধিক ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰতিটো গোট ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল।

Prove that each set of $(n+1)$ or more vectors of a finite-dimensional vector space V over F dimension n is linearly dependent.

(c) ভেক্টৰ স্থানৰ ভিত্তি নিৰ্ধাৰণ কৰা। যদি $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ আৰু $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ দুয়োটা F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান Vৰ ভিত্তি হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $m = n$. 4

If $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ and $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ are both bases of a vector space V over a field F, then prove that $m = n$.

নাইবা / *Or*

যদি U এটা সসীম-মাত্রিক ভেক্টৰ স্থান Vৰ এটা সঠিক উপস্থান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে Uৰ মাত্রা Vৰ মাত্রাতকৈ কম।

If U is a proper subspace of a finite-dimensional vector space V, show that the dimension of U is less than the dimension of V.

4. (a) Fৰ ওপৰত V আৰু W ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে একক আৰু শূন্য ৰূপান্তৰ সংজ্ঞায়িত কৰা। 1+1=2

Define identity and zero transformations for the vector spaces V and W over F.

(b) ভেক্টৰ স্থানৰ ৰৈখিক ৰূপান্তৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱাওক যে মেপিং $T:(a, b) \rightarrow (a+2, b+3)$ $\mathbb{R}^2$ৰ ওপৰত Vৰ ৰৈখিক ৰূপান্তৰ নহয়। 1+3=4

Define linear transformation of a vector space. Show that the mapping $T:(a, b) \rightarrow (a+2, b+3)$ of V over $\mathbb{R}^2$ into itself is not a linear transformation.

(c) T হৈছে Vৰ পৰা Wলৈ এটা ৰৈখিক ৰূপান্তৰ। প্ৰমাণ কৰা যে Tৰ সাপেক্ষে Vৰ ছবিখন Wৰ এটা উপস্থান। 4

Let T be a linear transformation from V to W. Prove that the image of V under T is a subspace of W.

নাইবা / Or

ধৰা হওক T এটা ভেক্টৰ স্থান Vৰ বৈখিক ৰূপান্তৰ। প্ৰমাণ কৰা যে $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$, Tৰ কাৰ্নেল, Vৰ এটা উপস্থান।

Let T be a linear transformation of a vector space V. Prove that $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$, the Kernel of T, is a subspace of V.

(d) ধৰা হওক V আৰু W ভেক্টৰ স্থান, আৰু $T: V \to W$ বৈখিক। যদি V সসীম-মাত্ৰিক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$ 4

Let V and W be vector spaces, and let $T: V \to W$ be linear. If V is finite-dimensional then prove that

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

নাইবা / Or

ধৰা হওক V আৰু W ভেক্টৰ স্থান আৰু $T: V \to W$ বৈখিক। প্ৰমাণ কৰা যে T এক-এক যদি আৰু যদিহে Tএ Vৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহ Wৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহৰ ওপৰত থাকে।

Let V and W be vector spaces and $T: V \to W$ be linear. Prove that T is one-one if and only if T carries linearly independent subsets of V onto linearly independent subsets of W.

(e) ধৰা হওক β আৰু γ ক্ৰমে $\mathbb{R}^2$ আৰু $\mathbb{R}^3$ৰ বাবে প্ৰামাণিক ক্ৰমবদ্ধ ভিত্তি। তেন্তে $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ যাতে

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$$

দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত ৰৈখিক ৰূপান্তৰ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ৰ বাবে মেট্ৰিক্স উপস্থাপন কৰা। 5

Let β and γ be the standard ordered bases for $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ respectively, then for the linear transformation $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ defined by

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$$

compute the matrix representation.

নাইবা / Or

ধৰা হওক V আৰু W এটা F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান, আৰু $T, U: V \to W$ ৰৈখিক। প্ৰমাণ কৰা যে

Let V and W be vector spaces over a field F, and let $T, U: V \to W$ be linear. Prove that

(i) সকলো $a \in F, aT + U$ৰ বাবে ৰৈখিক;

for all $a \in F, aT + U$ is linear;

(ii) Vৰ পৰা Wলৈ সকলো ৰৈখিক ৰূপান্তৰৰ সংগ্ৰহ Fৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

the collection of all linear transformations from V to W is a vector space over F.

★★★