Total No. of Printed Pages—8

4 SEM FYUGP MTHC4B

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4B

(Riemann Integration and Series of Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$ ৰ টেগড্ পাৰ্টিশ্যনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define a tagged partition of $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $[a, b]$ত সীমাবদ্ধ থকা এটা ফলন f ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন $[a, b]$ ৰ সাপেক্ষে নিম্ন আৰু উৰ্ধ্ব সমষ্টিৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define the upper and lower sums of a function f bounded on $[a, b]$ with respect to a partition of $[a, b]$.

(c) যদি [0, 1] ত f এটা একস্বৰ ক্ৰমবৰ্ধমান ফলন হয় আৰু $P=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$, [0, 1] ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন হয়, তেন্তে $L(f, P)$ আৰু $U(f, P)$ নিৰ্ণয় কৰা। 4

If P is a partition of [0, 1] given by

$$P=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

and f is a strictly increasing function on [0, 1], then find $L(f, P)$ and $U(f, P)$.

(d) যদি $\forall\, \varepsilon > 0$, $[a, b]$ ত সীমাবদ্ধ এটা ফলন f এ নিম্নোক্ত চৰ্ত

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

সিদ্ধ কৰে য'ত P, $[a, b]$ ৰ এক পাৰ্টিশ্যন, তেন্তে দেখুওৱা যে f, $[a, b]$ ত অনুকলনীয় হ'ব। 4

If $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ a bounded function f on $[a, b]$ satisfying $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, where P is a partition of $[a, b]$, then show that f is integrable on $[a, b]$.

(e) দিয়া আছে (Given)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}\end{cases}$$

f অনুকলনীয় হয় নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা। 4

investigate whether f is integrable or not.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে সকলো সীমাবদ্ধ ফলন অনুকলনীয় নহয়।

Establish that all bounded functions are not integrable.

(f) দেখুওৱা যে যদি $[a, b]$ত f এটা সীমাবদ্ধ ফলন যিটো ডাৰ্বিউ অনুকলনীয়, সেই ফলন $[a, b]$ত ৰীমান অনুকলনীয় হ'ব। 4

Establish that Darboux's integrability of a bounded function f on $[a, b]$ implies Riemann integrability of that function on $[a, b]$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,;\;\; x \in [a, b]$$

$[a, b]$ত অনবিচ্ছিন্ন আৰু যদি f, $x \in [a, b]$ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে F অৱকলনীয় হ'ব আৰু তেতিয়া $f = F'$ হ'ব।

is continuous on $[a, b]$ and if f is continuous on $x \in [a, b]$, then F is differentiable and $f = F'$.

2. *(a)* তলৰ যি কোনো **দুটাৰ** অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 2×2=4

Examine the convergence of any *two* of the following :

(i) $\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}} dx$

(ii) $\int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^3}$

(iii) $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$

(b) দেখুওৱা যে

Show that

(i) $\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$

(ii) $\frac{\Gamma(n)}{c^n} = \int_0^\infty e^{-cy} y^{n-1} \, dy$ 2+2=4

(c) দেখুওৱা যে

Show that

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$ 3

3. *(a)* বাস্তৱ ফলনৰ অনুক্ৰমৰ বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define pointwise convergence of a sequence of functions on $\mathbb{R}$.

(b) দিয়া আছে (Given)

$$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$$
$$f_n(k) = n \pmod{k};\ k = 1, 2, 3$$

য'ত $n \pmod{k}$, k ক n ৰে হৰণ কৰিলে থকা বাকী। দেখুওৱা যে (f_n) বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰী নহয়। 2

where $n \pmod{k}$ is the remainder when n divides k. Show that (f_n) does not converge pointwise.

(c) তলৰ যি কোনো **চাৰিটাৰ** উত্তৰ দিয়া : 4×4=16

Answer any *four* of the following :

(i) যদি $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে (f_n), $[0, \infty)$ ত সমমাত্ৰিকভাৱে 0 লৈ অভিসাৰী হ'ব।

If $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, then show that the sequence (f_n) converges uniformly to 0 on $[0, \infty)$.

(ii) (f_n) অনুক্ৰমৰ বাবে ক'চিৰ সমমাত্ৰিক অনুক্ৰমৰ চৰ্ত লিখি প্ৰমাণ কৰা, য'ত $f_n : X \to \mathbb{R}$; $X \subseteq \mathbb{R}$.

State and prove Cauchy's criterion of uniform convergence for the sequence (f_n), where

$$f_n : X \to \mathbb{R}\,;\; X \subseteq \mathbb{R}$$

(iii) ফলনৰ শ্ৰেণীৰ নিশ্চিত আৰু সমমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ ৱেইৰস্ট্ৰাচৰ M-টেষ্টটো উল্লেখ কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো সমমাত্ৰিক অভিসাৰী :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt;\; 0 < r < 1$$

State Weierstrass M-test for absolute and uniform convergence of a series of functions and hence show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt;\; 0 < r < 1$$

converges uniformly.

(iv) দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো যি কোনো অন্তৰাল $[a, b]$ ত সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী :

Show that the following series is uniformly convergent on any interval $[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

(v) যদি (f_n) সমমাত্রিকভাৱে f লৈ Xৰ ওপৰত অভিসাৰী হয়, য'ত $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আৰু f_n বোৰ $a \in X$ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে f, $a \in X$ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব।

If (f_n), where $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converges uniformly on X to f and f_n's are continuous at $a \in X$, then show that f is continuous at $a \in X$.

4. (a) সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ক f_n; $n = 0, 1, 2, \cdots$ ফলনৰ অসীম শ্ৰেণী হিচাবে প্ৰকাশ কৰা। 1

Express the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ in the form of an infinite series of functions f_n; $n = 0, 1, 2, \cdots$.

(b) সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ৰ বাবে এটা বিস্তৃত বাস্তৱ সংখ্যা R নিৰ্ণয় কৰা যাতে $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. 3

For the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ determine an extended real number R such that $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

(c) যদি এটা সূচক শ্রেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ নিশ্চিত আৰু সমমাত্ৰিকভাৱে f লৈ অভিসাৰী হয়, দেখুওৱা যে f, $(-R, R)$ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব, য'ত R; $0 < R \le \infty$, এটা বিস্তৃত বাস্তৱ সংখ্যা। 3

If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converges absolutely and uniformly to a function f, show that there exists an extended real number R; $0 < R \le \infty$ such that f is continuous on $(-R, R)$.

(d) আবেল'ৰ সীমা সূত্ৰ উল্লেখ কৰি, ইয়াৰ সহায়েৰে দেখুওৱা যে সূচক শ্ৰেণী $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী। 4

State Abel's limit theorem and use it to show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

is uniformly convergent.

★★★