2 SEM FYUGP MTHC2

2 0 2 4

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC2

(Real Analysis and Differential Equations)

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

SECTION—A

(Real Analysis)

UNIT—I

1. (a) সত্য নে অসত্য লিখা :

Write True or False :

বদ্ধ অন্তৰাল $[x, x]$ ক আমি একক সংহতি $\{x\}$ হিচাপে লিখিব পাৰো। 1

The closed interval $[x, x]$ can be written as the singleton set $\{x\}$.

(b) বাস্তৱ সংখ্যা ($\mathbb{R}$)ৰ পূৰ্ণতাৰ ধৰ্মটো লিখা। 1

State the completeness property of $\mathbb{R}$.

(c) যদি $a \in \mathbb{R}$ যাতে $a \cdot a = a$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে হয় $a = 0$ অথবা $a = 1$. 2

If $a \in \mathbb{R}$ such that $a \cdot a = a$, then prove that either $a = 0$ or $a = 1$.

(d) যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^2 > 0$. 2

If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, then prove that $a^2 > 0$.

(e) সংহতিৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। বলজান'-ওৱাৰাষ্ট্ৰেছৰ সূত্ৰটো (সংহতিৰ বাবে) লিখা। 1+1=2

Define limit point of a set. Write the Bolzano-Weierstrass theorem for set.

(f) ধৰা হ'ল S এটা $\mathbb{R}$ৰ অৰিক্ত আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ উপসংহতি আৰু $a \in \mathbb{R}$ যি কোনো এটা সংখ্যা। যদি $a+S = \{a+s : s \in S\}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sup(a+S) = a + \sup S$$ 4

Let S be a non-empty subset of $\mathbb{R}$ such that S is bounded above. Let $a \in \mathbb{R}$ be any number. If $a+S = \{a+s : s \in S\}$, then prove that

$$\sup(a+S) = a + \sup S$$

অথবা / Or

যদি $y > 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $n_y \in \mathbb{N}$ৰ কাৰণে $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

If $y > 0$, then show that there exists $n_y \in \mathbb{N}$ such that $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

(g) যদি x আৰু y দুটা যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $x < y$, তেন্তে দেখুৱাব লাগে যে আমি এটা $r \in \mathbb{Q}$ পাম যাতে $x < r < y$. 3

If x and y are any real numbers with $x < y$, then show that there exists a rational number $r \in \mathbb{Q}$ such that $x < r < y$.

(h) প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ গণনীয় নহয়। 5

Show that the set of real numbers $\mathbb{R}$ is not countable.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে এনেকুৱা কোনো পৰিমেয় সংখ্যা r পোৱা নাযায় যাতে $r^2 = 2$.

Show that there does not exist a rational number r such that $r^2 = 2$.

UNIT—II

2. (a) একদিষ্ট অভিসাৰী উপপাদ্যটো লিখা। 1

State monotone convergence theorem.

(b) শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়কটো লিখা। 1

State Cauchy criterion for series.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা বাস্তৱ অনুক্ৰমৰ অতিবেছি এটা সীমাহে থাকিব পাৰে। 2

Prove that a sequence in $\mathbb{R}$ can have at most one limit.

(d) যদি x_n অনুক্ৰমটো x লৈ অভিসাৰী আৰু y_n অনুক্ৰমটো y লৈ অভিসাৰী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $x_n y_n$ অনুক্ৰমটো xy লৈ অভিসাৰী হ'ব। 4

If x_n and y_n are two sequences such that x_n converges to x and y_n converges to y, then show that $x_n y_n$ converges to xy.

(e) দেখুওৱা যে x_n অনুক্ৰমটো অপসাৰী য'ত

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$ 4

Show that the sequence x_n with

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

is divergent.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে x_n অনুক্ৰমটো অভিসাৰী য'ত

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Show that the sequence x_n with

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

is convergent.

(f) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী বুলি দেখুওৱা। 3

Show that the series $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ is divergent.

(g) তলৰ যি কোনো এটা শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5

Test the convergence of any one of the following series :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} x^n$, $x > 0$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$

SECTION—B

(Differential Equations)

UNIT—III

3. (a) অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ সমাধান বুলিলে কি বুজা? 1

What do you mean by particular solution of a differential equation?

(b) তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা অনুকলনীয় উৎপাদক উলিওৱা : 1

Find an integrating factor of the following differential equation :

$$t^2 \frac{dx}{dt} + x = 1$$

(c) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 2

Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

(d) দেখুওৱা যে, $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ হ'ল $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা বহিৰ্লিখিত সমাধান। 2

Show that $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ is an explicit solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

(e) তলৰ যি কোনো তিনিটা অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰা : 3×3=9

Solve any *three* of the following differential equations :

(i) $(xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + 2x)\,dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

(iii) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

(iv) $(y\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx + (\tan x + 2y)\,dy = 0$

UNIT—IV

4. (a) n মাত্ৰাবিশিষ্ট সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define nth order homogeneous linear differential equation.

(Continued)

(b) যদি এটা ধ্ৰুৱক সহগযুক্ত সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণৰ মূল $2 \pm 3i$ হয়, তেন্তে অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ বা সামূহিক সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 1

If the auxiliary equation has the root $2 \pm 3i$, then write the general solution of the corresponding homogeneous linear differential equation with constant coefficients.

(c) দ্বিমাত্ৰিক সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বাবে সমাৰোপন নীতিটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+3=4

State and prove the principle of superposition for homogeneous linear differential equation of 2nd order.

(d) nটা ফলনৰ এটা সংহতিৰ বাবে ৰনস্কিয়ানৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। দেখুওৱা যে,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানকেইটা ক্ৰমে e^x, e^{-x} আৰু e^{2x} বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। অৱকল সমীকৰণটোৰ সামূহিক সমাধানটো লিখা। 1+3+1=5

Define Wronskian for a set of n functions. Show that the solutions e^x, e^{-x} and e^{2x} of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

are linearly independent. Write its general solution.

(Turn Over)

(e) অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা। 6

Use the method of undetermined coefficients to solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$.

অথবা / Or

প্ৰাচলৰ ভেদ/বিচৰণ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা

Use the method of variation of parameters to solve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$$

(f) সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) : 4×2=8

Solve (any *two*) :

(i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} + m^4y = 0$

***